UNIVERSIDADE DA CORUÑA

# LA VALORACIÓN BASADA EN EL ARBITRAJE EN EL MERCADO: EL MODELO APT

Carlos Piñeiro Sánchez

Grupo de investigación en Dirección Financiera y Sistemas de Información (fysig)

Departamento de Economía Financiera y Contabilidad

# CONTENIDO

- Características e hipótesis
  - La presunción de ortogonalidad de los factores
- Estimación del modelo
  - Arbitraje y cartera de arbitraje
  - Estimación por cálculo matricial
  - Estimación por métodos de regresión
- La identificación de los factores

# EL MODELO DE VALORACIÓN POR ARBITRAJE

- Principal alternativa práctica a CAPM
  - Considera la existencia de varios factores potenciales
  - No requiere que los rendimientos sean normales
  - No precisa del concepto de cartera de mercado
- Hipótesis principales
  - Binomio rentabilidad – riesgo
    - Inversores aversos al riesgo
  - Existe una tasa sin riesgo a la que se puede prestar o pedir prestado, sin limitaciones
  - Mercados competitivos, sin fricciones
  - Existe un número suficientemente grande de activos

# CARACTERÍSTICAS DE APT

- El rendimiento por período se relaciona linealmente con varios factores de influencia:
  - $rj_t = \mu_j + b_{j1} \cdot F_1 + b_{j2} \cdot F_2 + \ldots + b_{jk} \cdot F_k + \varepsilon_j$
- El modelo teórico define el rendimiento del título en términos de varios factores de influencia:
  - $\mu_j = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot b_{j1} + \lambda_2 \cdot b_{j2} + \ldots + \lambda_k \cdot b_{jk}$
  - – bjh expresa la sensibilidad unitaria del título j a los cambios en el factor de influencia h
- En un mercado en equilibrio, todos los títulos se situarán sobre el hiperplano de APT
  - – En otro caso existirán oportunidades de arbitraje

# UN PROBLEMA FORMAL: LA MULTICOLINEALIDAD

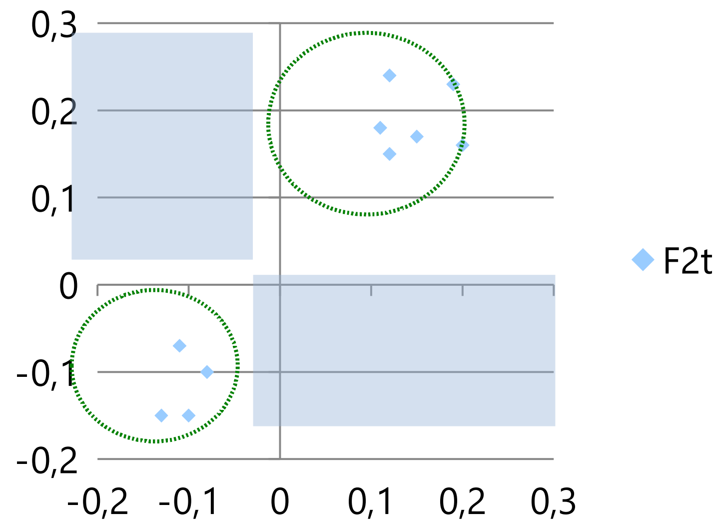
- APT presume la existencia de dos o más factores que afectan a la rentabilidad esperada de los títulos
  - Estos factores deben ser, por definición, distintos
    - Esto equivale a afirmar que cada uno debe aportar una información singular, que no esté repetida en los otros factores
- Con frecuencia ocurre que los factores están correlacionados, en mayor o menor medida
  - Esto es particularmente cierto en el factor mercado
  - Para aplicar MCO es preciso eliminar la correlación
    - La multicolinealidad causa un sesgo en la evaluación de la relación estadística y la determinación de los estimadores

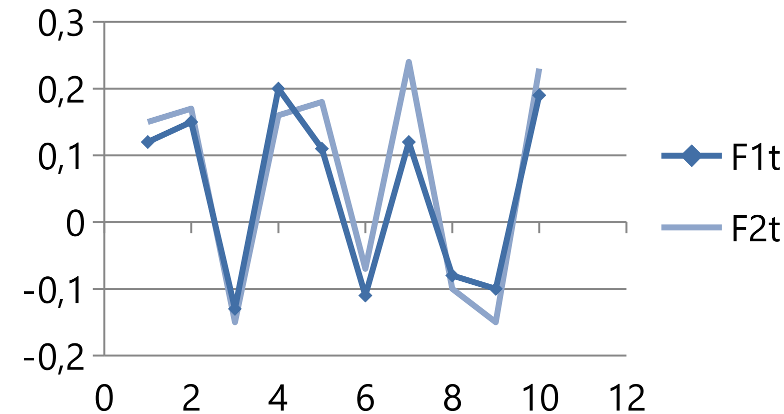
# GENERAR FACTORES ORTOGONALES

- Si un factor $f_h$ está correlacionado con los otro(s)…
  - Algunos cambios de $f_h$ se explican por estos otros factores
  - Pero otros cambios en $f_h$ se deberán a causas específicas
- Entonces, la regresión $f_{ht} = \alpha_0 + b_{h1} \cdot f_{1t} + \ldots + b_{hk} \cdot f_{kt} + \varepsilon_h$ no será perfecta, y se observarán errores de estimación
  - Las oscilaciones en $f_h$ correlacionadas con cambios en los otros $f_j$ están explicadas por la regresión
    - Entonces, ya están en las series de estos $f_j$ y son redundantes
  - Los cambios en $f_h$ que no se explican por estos otros factores, se deben a propiedades específicas del factor $f_h$
    - Esta es la información singular que debemos conservar
    - Resulta evidente que los cambios en $f_h$ no explicados por la regresión son los errores de estimación: $e_{ht} = f_h - f_{ht}^*$
- Reemplazaremos $f_h$ por la serie de errores

# GENERAR FACTORES ORTOGONALES

| t | $F_{1t}$ | $F_{2t}$ |
|---|---|---|
| 1 | 0,1200 | 0,1500 |
| 2 | 0,1500 | 0,1700 |
| 3 | -0,1300 | -0,1500 |
| 4 | 0,2000 | 0,1600 |
| 5 | 0,1100 | 0,1800 |
| 6 | -0,1100 | -0,0700 |
| 7 | 0,1200 | 0,2400 |
| 8 | -0,0800 | -0,1000 |
| 9 | -0,1000 | -0,1500 |
| 10 | 0,1900 | 0,2300 |




Las series están correlacionadas: comparten "información". Es preciso eliminar esta correlación, o el modelo padecerá multicolinealidad

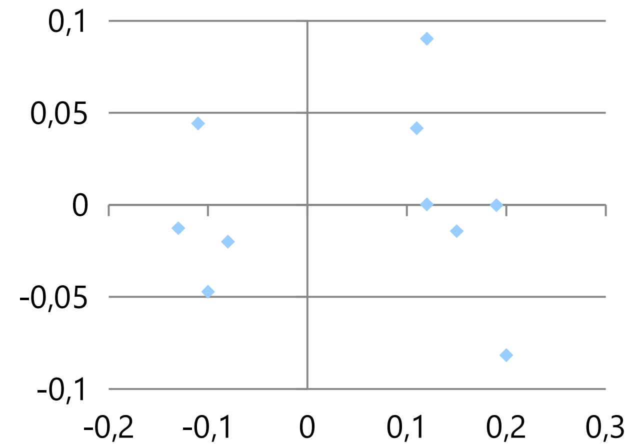
$\rho = 0,9534$

# GENERAR FACTORES ORTOGONALES

- El criterio de trabajo consiste en eliminar, en el factor más amplio o comprensivo, la información duplicada.
- En este caso vamos a suponer que $F_2$ es un indicador de mercado que, suponemos, está relacionado con un segundo factor $F_1$. Entonces, $F_{2t} = a + b \cdot F_{1t}$

$F_{2t} = 0{,}0120 + 1{,}1485 \cdot F_{1t}$

| t | $F_{1t}$ | $F_{2t}$ | $I_{1t} = F_{1t}$ | $F_{2t}^*$ | $I_{2t} = e_t^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1200 | 0,1500 | 0,1200 | 0,1498 | 0,0002 |
| 2 | 0,1500 | 0,1700 | 0,1500 | 0,1843 | -0,0143 |
| 3 | -0,1300 | -0,1500 | -0,1300 | -0,1373 | -0,0127 |
| … | … | … | … | … | … |
| 10 | 0,1900 | 0,2300 | 0,1900 | 0,2302 | -0,0002 |




$\rho = 0{,}0039\%$

$F_{1t}$ y $e_t$ son ortogonales

# PODEMOS DAR A APT UNA APARIENCIA EXTERNA SIMILAR A CAPM...

- Un activo F sin riesgo tendrá $b_{Fh} = 0 \; \forall h$
  - $\mu_F = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot b_{F1} + \ldots + \lambda_k \cdot b_{Fk} = \lambda 0$
- Supongamos que existe j con $b_{j1} = 1$ y $b_{jh} = 0 \;\; \forall h = 2 \ldots k$
  - $\mu_j = \mu_f + \lambda_1 \cdot 1 + 0 = \mu_f + \lambda_1$
  - Si el factor 1 es el mercado, j puede identificarse con la cartera de mercado ($\beta = 1$); entonces $\mu_M = \mu_f + \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = (\mu_M - \mu_f)$
- Si existen k títulos con sensibilidades unitarias a los otros k factores, APT puede expresarse como
  - $\underbrace{\mu_j = \mu_f}_{\lambda_0} + \underbrace{\boxed{(\mu_M - \mu_f)}}_{\lambda_1} \cdot b_{j1} + \ldots + \underbrace{\boxed{(\mu_k - \mu_f)}}_{\lambda_k} \cdot b_{jk}$

# PERO APT ES COMPLETAMENTE DIFERENTE

- Se basa en hipótesis distintas sobre los activos, los inversores, y el mercado
  - No requiere que la cartera de mercado sea observable (de hecho, no necesita del concepto de cartera de mercado)
  - No es preciso realizar asunciones complejas sobre las preferencias del decisor: sólo que sea averso al riesgo
- Presume que el rendimiento esperado se explica por más de un factor
- No establece ninguna hipótesis sobre la distribución de probabilidad de los rendimientos
- … y se estima de forma diferente

# EL CONCEPTO DE ARBITRAJE

- APT se desarrolla a partir de la presunción de que los títulos están correctamente valorados gracias al arbitraje
  - Arbitrar es analizar la mejor forma de obtener ventaja de las diferencias en el valor de los títulos en diferentes lugares al mismo tiempo, o diferentes instantes de tiempo, sin modificar la riqueza ni la exposición al riesgo
- Supongamos que el inversor modifica su cartera
  - En condiciones de equilibrio, si no varía su inversión neta ni altera su exposición al riesgo, obtendrá la misma expectativa de rentabilidad
- El cambio no aporta rentabilidad, riesgo, ni inversión
  - La cartera de arbitraje es una cartera de transición: tiene EMR nula, riesgo nulo, e inversión nula

# ¿CÓMO SE ESTIMA APT?

- El rendimiento de una cartera de arbitraje es
  $r_a = \Sigma x_j \cdot r_j = \Sigma x_j \cdot (\mu_j + b_{j1} \cdot F_1 + b_{j2} \cdot F_2 + \ldots + b_{jk} \cdot F_k + \varepsilon_j)$
- El rendimiento esperado debe ser nulo
  - $\Sigma x_j \cdot \mu_j = 0$
- Esta cartera implica una inversión neta igual a cero
  - $\Sigma x_j = 0$ $\longrightarrow$ (avalado por Ley grandes números)
- Y posee riesgo nulo (sistemático y específico)
  - $\Sigma x_j \cdot b_{jh} = 0 \quad h = 1 \ldots k$
  - $\Sigma x_j \cdot \varepsilon_j = 0$
- Precisamos conocer, para cada título,
  - La rentabilidad media esperada $\mu_j$
  - La sensibilidad del rendimiento, en relación a cada uno de los k factores de influencia
    $b_{jh} \quad h = 1 \ldots k$
- El primer paso es estimar los modelos de mercado, o ecuaciones características de los títulos: $r_{jt} = \mu_j + b_{j1} \cdot F_1 + b_{j2} \cdot F_2 + \ldots + b_{jk} \cdot F_k + \varepsilon_j$

# ¿CÓMO SE ESTIMA APT?

Estimadas las ecuaciones características,

$$r_{jt} = \mu_j + b_{j1} \cdot F_1 + b_{j2} \cdot F_2 + \ldots + b_{jk} \cdot F_k + \varepsilon_j$$

ya disponemos de todos los datos para plantear y resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_A & \mu_B & \mu_C & \ldots & \mu_Z \\ b_{A1} & b_{B1} & b_{C1} & \ldots & b_{Z1} \\ b_{A2} & b_{B2} & b_{C2} & \ldots & b_{Z2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{A2} & b_{B2} & b_{C2} & \ldots & b_{Z2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ \ldots \\ x_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector $\mu$ es C.L. de los demás: existen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_k$ tales que

$$[\ \mu_A \ldots \mu_Z\ ] = \lambda_0\, [1 \ldots\ 1] + \lambda_1\, [\ b_{A1}\ \ldots\ b_{Z1}] + \ldots + \lambda_k\, [\ b_{Ak}\ \ldots\ b_{Zk}\ ]$$

Para conocer los valores $\lambda_0$, $\lambda_1$, ... $\lambda_k$ que verifican

$$[\ \mu_A \dots \mu_Z\ ] = \lambda_0\ [1 \dots\ 1] + \lambda_1\ [\ b_{A1}\ \dots\ b_{Z1}] + \dots + \lambda_k\ [\ b_{Ak}\ \dots\ b_{Zk}\ ]$$

basta con resolver un sistema de ecuaciones cuya expresión matricial es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \mu_A \\ \mu_B \\ \mu_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{A1} & b_{A2} \\ 1 & b_{B1} & b_{B2} \\ 1 & b_{C1} & b_{C2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{A1} & b_{A2} \\ 1 & b_{B1} & b_{B2} \\ 1 & b_{C1} & b_{C2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mu_A \\ \mu_B \\ \mu_C \end{pmatrix}$$

No obstante, este sistema está sobredimensionado (n es mucho mayor que el número de incógnitas o factores, k). Por ello, suelen emplearse técnicas de regresión

# UN EJEMPLO DE APLICACIÓN

| t | $r_A$ | $r_B$ | $r_C$ | $I_{1t} = F_{1t}$ | $I_{2t} = e_t^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0939 | 0,0339 | 0,0649 | 0,12 | 0,0002 |
| 2 | 0,1221 | 0,0544 | 0,0821 | 0,15 | -0,0143 |
| … | … | … | … | … | … |
| 10 | 0,1431 | 0,0482 | 0,1001 | 0,19 | -0,0002 |

| | a | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|---|
| rA | 0,0077 | 0,7052 | -0,412 |
| rB | 0,0109 | 0,2061 | -0,762 |
| rC | 0,0027 | 0,4907 | -0,555 |

$$r_{At} = 0{,}0077 + 0{,}7052 \cdot F_{1t} - 0{,}4120 \cdot F_{2t}$$

Estimadas las ecuaciones características, ya disponemos de todos los datos para plantear y resolver el sistema:

| a | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| 0,0077 | 0,7052 | -0,4119 |
| 0,0109 | 0,2061 | -0,7617 |
| 0,0027 | 0,4907 | -0,5546 |

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{A1} & b_{A2} \\ 1 & b_{B1} & b_{B2} \\ 1 & b_{C1} & b_{C2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mu_A \\ \mu_B \\ \mu_C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}7052 & -0{,}4119 \\ 1 & 0{,}2061 & -0{,}7617 \\ 1 & 0{,}4907 & -0{,}5546 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}077 \\ 0{,}0109 \\ 0{,}0027 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}7313 \\ 0{,}5682 \\ 0{,}8207 \end{pmatrix}$$

$$\mu_j = \lambda_0 + \lambda_1 \beta_{j1} + \lambda_2 \beta_{j2} + \varepsilon_j \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\mu_j = -\,0{,}7313 \;+0{,}5682 \cdot \beta_{j1} - 0{,}8207 \cdot \beta_{j2}}}$$

# IDENTIFICANDO LOS FACTORES RELEVANTES: EL MODELO CRR

- APT sugiere que la rentabilidad esperada es una función de varios factores, pero no especifica cuáles
  - Su identificación corre a cargo del investigador
  - Debe realizarse específicamente para cada mercado
- Se han sugerido y validado algunos modelos operativos
  - Chen, Roll y Ross (CRR) sugieren un modelo con cinco factores:
    - Riesgo de confianza (DP y deuda privada)
    - Riesgo de horizonte temporal: (rendimiento a largo y corto plazo)
    - Riesgo de inflación (inflación mensual prevista y tasa real)
    - Riesgo del ciclo de negocios (variación del IPI)
    - Influencia del mercado (ortogonal, obtenido como residuo)

# EL MODELO DE CRR: EL MERCADO COMO FACTOR RESIDUAL

- Cabe esperar que la serie de rentabilidades de la cartera de mercado esté influida por los otros factores
  - Tasas de interés, inflación, oferta monetaria, etc.
- Entonces, $r_{Mt}$ sería una CL de los otros factores y deberíamos poder verificar esta relación:
  - $r_{Mt} = \alpha_0 + b_{M1} \cdot f_{1t} + b_{M2} \cdot f_{2t} + b_{M3} \cdot f_{3t} + b_{M4} \cdot f_{4t} + f_{5t}$
  - donde $f_5$ es una perturbación aleatoria (*ruido blanco*)
- El factor ortogonal expresivo de la influencia específica del mercado de capitales se define como el error de estimación:
  - $f_{5t} = r_{Mt} - r_{Mt}^* = r_{Mt} - (\alpha_0 + b_{M1} \cdot f_{1t} + b_{M2} \cdot f_{2t} + b_{M3} \cdot f_{3t} + b_{M4} \cdot f_{4t})$
- El modelo se completa con factores descriptivos de los cambios que, subjetivamente, el decisor prevé en los cinco regresores
  - $\mu_j = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot b_{j1} + \lambda_2 \cdot b_{j2} + \lambda_3 \cdot b_{j3} + \lambda_4 \cdot b_{j4} \cdot f_4 + \lambda_5 \cdot f_5 +$
    $+ b_{j1} \cdot f_1 + b_{j2} \cdot f_2 + b_{j3} \cdot f_3 + b_{j4} \cdot f_4 + b_{j5} \cdot f_5 + \eta_j$

# BIBLIOGRAFÍA DE TRABAJO


- Brealey, R. A.; Myers, S. C. (2007): *Fundamentos de financiación empresarial*. Madrid: McGraw – Hill.
- Doldán, F. (2003): *Dirección Financiera*. Santiago: Tórculo
- Piñeiro, C. (2003): *Técnicas y modelos para la gestión financiera de la empresa*. Santiago: Tórculo
- Piñeiro, C., *et al*. (2007): *Dirección Financiera. Modelos Avanzados de Decisión con Excel*. Madrid: Delta.
- Piñeiro, C.; de Llano, P. (2010): *Principios y modelos de dirección financiera*. Santiago: Andavira.
- Piñeiro, C.; de Llano, P. (2010): *Dirección financiera. Un enfoque centrado en valor y riesgo*. Madrid: Delta
- Suárez Suárez, A. (1995): *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. Madrid